

АНСАМБЛЕВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С МОДЕЛЯМИ ЗЕМНОЙ СИСТЕМЫ

*A. B. Елисеев**

Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова, г. Москва;

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, г. Москва;

Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, г. Нижний Новгород;

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, г. Москва, Россия

В настоящее время широко используется ансамблевый подход к моделированию климата. Это, в частности, позволяет оценить характеристики неопределенности изменений состояния земной климатической системы. Часто при этом используют уже существующий ансамбль современных моделей земной системы, например СМИР (Coupled Models Intercomparison Project) различных поколений. Целесообразна также постановка специальных ансамблевых численных экспериментов с климатическими моделями, в которых те или иные параметры моделей или условий интегрирования варьируются систематическим образом. Целью данной работы является обзор наиболее часто применяемых методов построения и обработки ансамблевых численных экспериментов с моделями земной системы, а также примеров использования ансамблевого подхода для задач моделирования климата. Обсуждается влияние различных источников неопределенности на полную неопределенность результатов моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Численные эксперименты (ЧЭ) с моделями земной системы (ЗС, представляющей собой совокупность атмосферы, океана, криосферы, деятельного слоя суши, литосферы и биоты) — единственный доступный метод оценки изменения состояния этой системы в будущем, а также анализа процессов, приводящих к климатическим вариациям на различных временных масштабах.¹ На технологическом уровне соответствующая задача решается численно как задача Коши с заданием граничных (вообще говоря, зависящих от времени) условий интегрирования и сценариев внешнего воздействия на земную систему [1]. Однако заметное различие результатов оценок изменения состояния ЗС между различными моделями и сценариями [2, 3] приводит к необходимости выделения вклада в это различие внешних воздействий² и механизмов естественной изменчивости климата³ в общую неопределенность оценок климатических изменений. Здесь и далее по тексту под неопределенностью подразумевается разброс модельных значений той или иной климатической переменной, возникающий ввиду различий между формулировками отдельных моделей или условий проведения расчётов с ними. Количественно неопределенность выражается, как правило, в терминах статистических характеристик ансамбля (ансамблевого среднеквадратичного отклонения или внутриансамблевого доверительного интервала).

В настоящее время общепринятым методом нахождения неопределенности климатических оценок является ансамблевый подход, позволяющий проводить такие оценки явным образом [4–8].

* eliseev.alexey.v@mail.ru

¹ Под климатом понимается совокупность состояний ЗС в различные моменты времени.

² Воздействий, формирование которых не связано с внутренними процессами ЗС; их примерами служат антропогенное воздействие, изменение параметров орбиты Земли или вулканические извержения.

³ Естественная изменчивость климата связана с развитием автоколебательных процессов в ЗС.

При этом, в частности, было отмечено, что для различных поколений детальных моделей земной системы (МЗС; представляют собой набор взаимодействующей модулей для воспроизведения динамики компонент ЗС), объединённых в рамках международного проекта Coupled Models Intercomparison Project (СМИР; представляет собой проект сравнения современных детальных МЗС с централизованными протоколами постановки ЧЭ), ансамблевое среднее значительно лучше согласуется с данными наблюдений, чем даже модели, признанные «лучшими» по тому или иному критерию. Это, например, отмечается для последнего поколения МЗС СМИР6 (СМИР, phase 6) для ряда переменных, характеризующих состояние климата (температура атмосферы, океана и деятельного слоя суши, атмосферные осадки, характеристики циркуляции атмосферы, распространение морского льда, интенсивность обмена энергией между компонентами ЗС, характеристики углеродного цикла) [3, рис. 3.42].

Это приводит к предположению о случайной природе ряда отклонений модельных оценок состояния земной климатической системы от данных наблюдений [8]. Несмотря на наличие единственной (но также известной лишь с некоторой точностью) климатической траектории по наблюдениям, ансамблевый подход к моделированию климата согласуется с представлением о климате как о статистическом ансамбле состояний ЗС за выбранный интервал времени (с длиной от нескольких десятилетий) [9]. При этом важно иметь в виду, что если 1) формулировка используемых в ансамбле моделей соответствует знаниям о физике земной системы, 2) все ЧЭ с моделями ансамбля интегрируются, начиная с одного и того же момента времени и с начальных условий, соответствующих (с некоторой точностью) знаниям о состоянии ЗС в этот момент времени, то каждый из модельных экспериментов, а также известная по наблюдениям климатическая траектория могут рассматриваться как отдельные реализации внутри одного и того же статистического ансамбля [10].

Целью данной работы является обзор наиболее часто используемых методов построения и обработки ансамблевых ЧЭ с моделями земной системы, а также примеры использования ансамблевого подхода для задач моделирования климата.

1. ИСТОЧНИКИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ МОДЕЛЬНЫХ РАСЧЁТОВ

Рассмотрение вопросов постановки и обработки ансамблевых численных экспериментов с моделями ЗС целесообразно предварить классификацией источников неопределённости результатов расчётов с такими моделями. Отметим, что эта классификация относится не только к МЗС: формально она может быть приложена и к моделям, описывающим не только земную систему, но и другие объекты.

1.1. Начальные условия интегрирования

При интегрировании МЗС численно решается задача Коши для дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, требующая задания начальных условий интегрирования, т. е. необходимо задание трёхмерных полей для всех переменных динамического ядра модели в начальный момент времени.

В разделе 2.1 показано, что используемые в настоящее время методы формирования ансамбля начальных условий для интегрирования МЗС при разных начальных условиях приводят к тому, что такой источник неопределённости является случайным и его влияние на общую неопределённость ансамблевого ЧЭ может быть уменьшено при построении ансамблевой статистики из отдельных реализаций.

1.2. Другие источники

Можно также выделить другие источники неопределённости результатов расчётов с моделями. К ним относятся:

- 1) выбор структуры модели (например, выбор между двумя схемами вычисления характеристик облаков или выбор между вариантом модели с модулем или без модуля вычисления биогеохимических циклов),
- 2) выбор значений коэффициентов (параметров) модели в каждом таком модуле,
- 3) выбор сценария внешних воздействий на модель.

Первые два из этих источников часто объединяют в один под названием модельной неопределённости.

Следует отметить, что модельная неопределённость даже без учёта других источников способна привести к двукратной (для CMIP5 – CMIP, phase 5) или даже трёхкратной (для CMIP6 – CMIP, phase 6) неопределённости отклика ЗС на единичный радиационный форсинг [11] (определенный как воздействие, приводящее в фиксированном начальном состоянии ЗС к возмущению потоков энергии на высоте тропопаузы, которое, будучи суммировано по всем физическим составляющим и усреднено по всему земному шару, равно $1 \text{ Вт}/\text{м}^2$).

Источники данного раздела являются детерминистскими. Как следствие, их вклад в неопределённость ансамблевой статистики в общем случае не уменьшается при увеличении размера ансамбля и может даже увеличиваться.

1.3. Относительный вклад источников неопределённости на неопределённость результатов численных экспериментов с МЗС

Для любой (вообще говоря, многомерной) зависящей от времени t модельной переменной $Y_k(t)$ (индекс k – номер модели или реализации внутри ансамбля; $1 \leq k \leq K$, K – размер ансамбля) можно выделить среднее по ансамблю моделей значение $\bar{Y}(t)$ и отклонение от него $Y'_k(t)$. В таком случае математическое ожидание $E(Y')(t) = 0$ и среднее по ансамблю можно рассматривать как детерминистскую часть отклика. Поскольку при типичной формулировке модели из детерминистских причин неопределённости от времени зависит лишь сценарий внешних воздействий, то $\bar{Y}(t)$ при таком простейшем подходе характеризует отклик ЗС на внешние воздействия. В свою очередь, $Y'_k(t)$ характеризует вклад естественной изменчивости в траекторию изменения состояния земной климатической системы для данной модели.

Вклад неопределённостей разного типа для оценок изменения климата в XXI веке при антропогенном воздействии на него был проанализирован с использованием различных поколений ансамбля CMIP в [12, 13]. При этом было получено, что в первые несколько десятилетий относительный вклад в неопределённость обусловлен заданием начальных условий и формулировкой модели. При приближении длительности численного эксперимента с моделями к столетию, однако, относительная роль начальных условий уменьшается, но становится значимой роль сценария внешних воздействий.

При этом общая неопределённость в первые годы численного эксперимента с ансамблем моделей на порядок меньше, чем на вековом масштабе [12, 13]. В абсолютных единицах вклад естественной изменчивости в общую неопределённость в целом не изменяется на протяжении интегрирования с длиной до нескольких сотен лет, а вклад неопределённости модели и неопределённости сценария значительно увеличивается.

Дополнительно следует отметить, что указанный подход для выделения детерминистского отклика справедлив лишь для линейных (или хотя бы слабонелинейных) систем. В противном

случае возможно взаимодействие между детерминистским откликом и естественной изменчивостью. Последнее порождает неопределённость оценок их интенсивности, причём величину этой неопределённости в рамках такого подхода оценить невозможно. В этом случае целесообразно для выделения сигнала использовать методы, учитывающие такое взаимодействие [14–17].

2. ПОСТАНОВКА АНСАМБЛЕВЫХ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Метод постановки ансамблевых численных экспериментов зависит от типа неопределённости, влияние которой предполагается проанализировать.

2.1. Влияние начальных условий интегрирования

Полный набор начальных условий Коши невозможно получить по данным измерений даже для относительно недавнего (современность и несколько десятилетий назад) периода. Более того, необходимость верификации моделей хотя бы по данным для периода инструментальных наблюдений для приземной температуры (последние полтора–два столетия) приводит к соответствующему смещению начала интегрирования модели назад по времени, что лишь ухудшает условия доступности данных наблюдений и их качества.

В связи с этим в настоящее время используется другой подход. Сначала с моделью проводится ЧЭ I при циклостационарных (меняющихся только по пространству, а также в суточном и годовом ходе) внешних условиях; межгодовые изменения этих условий отсутствуют. Длительность этого эксперимента выбирается из соображений выхода модели на состояние с достаточно малыми (в рамках заранее выбранного критерия) трендами изменения основных переменных. Численный эксперимент такого типа обычно называется контрольным равновесным. Цель таких экспериментов — получить наиболее полную информацию о климате в каждой рассматриваемой модели. В расчётах этого типа можно считать, что поведение системы будет эргодическим и неопределённость расчётов связана лишь с длительностью эксперимента, а от начального условия требуется только принадлежность к области притяжения модельного аттрактора. На следующем шаге полученное при этом состояние модели в данный день года и время суток, но в случайно выбранный один из последних годов равновесного численного эксперимента, используется в качестве начальных условий для ЧЭ II, который предполагается анализировать.

При таком подходе (называемом макроинициализацией [18]), во-первых, предполагается, что второй из этих численных экспериментов начинается с условий, близких к стационарным. Для расчёта на воспроизведение изменений климата в индустриальный период принято в качестве начального года интегрирования выбирать 1850 год и проводить соответствующий равновесный ЧЭ при условиях, соответствующий этому календарному году [18–21]. Условие квазистационарности при этом в целом подтверждается доступными данными наблюдений для приземной температуры и температуры поверхности океана.

Однако наличие нерегулярных (связанных с естественной изменчивостью климата) вариаций состояния ЗС и случайный выбор модельного года ЧЭ I для задания начальных условий второго численного эксперимента приводят к тому, что при детерминистской амплитуде фазы естественной изменчивости в начальных условиях ЧЭ II (например, в терминах соответствующих Фурье-компонент по времени) оказываются случайными [22]. В свою очередь, это приводит к различиям между траекториями изменения климата в ЧЭ II (большими на региональном уровне по сравнению с глобальным и на относительно малых временных масштабах; см. примеры в [23, 24]).

Альтернативным подходом (носящим название микроинициализации [18]) является наложение небольших возмущений на выбранные начальные условия. Такой подход также часто используется, например, в современных технологических системах прогноза погоды [25–27]. Однако отме-

тим, что межгодовые и междесятилетние вариации состояния ЗС, как правило, характеризуются выраженной пространственной структурой [17, 28–32]. Неучёт такой структуры, вообще говоря, может привести к нарушению внутренних системных связей в модели. На практике эта проблема решается использованием только очень малых возмущений для климатических переменных, на порядки величин меньших точности, достигаемой при их прямых измерениях (см. примеры в [18, 21, 33]).

Следует отметить, что описанные методы формирования ансамбля начальных условий используются только для ЧЭ II (но не используются для ЧЭ I) и согласуются с интерпретацией климата как высокоразмерной, нелинейной и неавтономной динамической системы со сложной хаотической динамикой [33–35]. При этом неопределенность, связанная с заданием начальных условий, обусловлена разбеганием фазовых траекторий с характерным временем, которое обратно пропорционально старшему ляпуновскому показателю λ_L аттрактора климатической системы, тогда как внешние воздействия определяют эволюцию этого аттрактора на медленных (по сравнению с λ_L^{-1}) временных масштабах. При этом следует иметь в виду, что при наличии неавтономных внешних воздействий на климат соответствующий аттрактор является *snapshot-аттрактором* (достаточно долго эволюционирующий ансамбль траекторий; близкий термин, но с более жёсткими ограничениями на начало интегрирования системы — *pull-back-аттрактор*), что согласуется с ансамблевым подходом к моделированию климата [35, 36].

Также следует иметь в виду, что при формировании ансамбля начальных условий интегрирования целесообразно стремиться к заполнению всего возможного набора состояний. Однако как для макро-, так и для микроинициализации этого, очевидно, гарантировать нельзя [37]. Кроме того, для обоих методов формирования ансамбля начальных условий, как правило, остаётся неизвестной многомерная функция распределения вероятности начальных полей, которая полезна для дальнейшего анализа ансамблевых расчётов (см. раздел 3 далее). Отметим, что если длина отдельных реализаций в ансамбле заметно меньше характерного времени инерционности медленных компонент ЗС, то начальные условия для этих компонент не требуют возмущения. Это справедливо, например, для расчётов с длительностью до нескольких столетий [18–21], когда не требуется формировать ансамбль начальных условий для компонент ЗС с большим (от 10^3 лет) временем отклика на внешнее воздействие.

2.2. Модельная неопределенность

Основной задачей при оценке вклада модельной неопределенности в результаты ансамблевых расчётов является получение количественной характеристики для внутриансамблевого разброса модельных траекторий. Этот разброс связан, во-первых, с конечной точностью знаний коэффициентов модели, так что изменение значений этих коэффициентов в рамках интервалов значений, полученных либо из измерений, либо соответствующих доверительным интервалам этих коэффициентов при машинном обучении МЗС, может привести к взаимному различию модельных траекторий при одних и тех же начальных условиях интегрирования. Во-вторых, указанный разброс связан с различиями в выборе структуры между различными МЗС (см. раздел 1.2).

Постановка численных экспериментов для исследования параметрической неопределенности может быть осуществлена с использованием рандомизации значений интересующих параметров. При этом, во-первых, целесообразно использовать методы рандомизации, позволяющие уменьшать размер выборки для снижения вычислительной нагрузки. Во-вторых, такие методы должны обеспечивать несмещённую ансамблевую статистику [38].

Для рассматриваемых в разделах 2.2.1 и 2.2.2 алгоритмов доступны библиотеки для распространённых языков программирования (C++, Fortran, Python), и сред (Matlab, Octave и R).

2.2.1. Параметрическая неопределенность: латинский гиперкуб

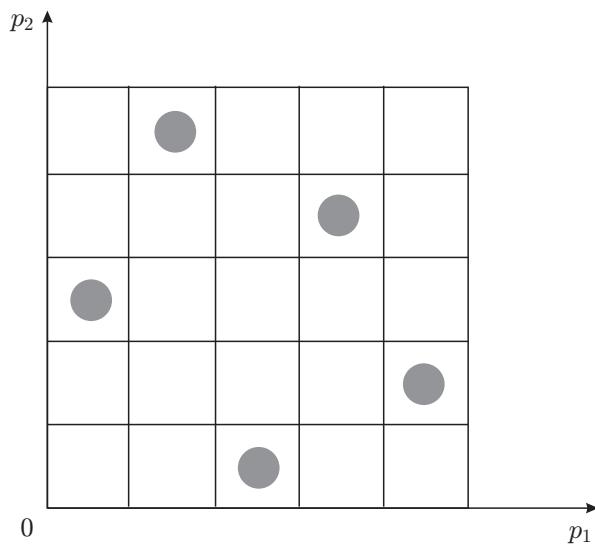


Рис. 1. Пример выборки по методу латинского гиперкуба для задачи с 2 параметрами и 5 интервалами для каждого из них

вой статистике [38–40]. Разбиение на интервалы целесообразно строить с выполнением условия равной вероятности нахождения параметров в каждом из подынтервалов $(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k)$, где k — номер подынтервала, $1 \leq k \leq K$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}^{(\min)}$, $\mathbf{p}_K = \mathbf{p}^{(\max)}$. Это, однако, требует знания функции распределения вероятности (ФРВ) для \mathbf{p} внутри всего интервала $(\mathbf{p}^{(\min)}, \mathbf{p}^{(\max)})$. Если такая функция неизвестна, можно ограничиться разбиением этого интервала на подынтервалы равной длины в пространстве параметров.

Примеры построения выборки для параметров методом латинского гиперкуба можно найти в [41–46].

2.2.2. Параметрическая неопределенность: марковская цепь Монте-Карло

Вычислительно эффективным (особенно в случае большого числа исследуемых параметров n) методом построения выборки является метод марковской цепи Монте-Карло (МЦМК) [47–51] (см. рис. 2). Подобно сказанному для метода латинского гиперкуба, использование этого алгоритма более эффективно при наличии информации о многомерной априорной ФРВ \mathcal{P}^* для исследуемых параметров. Если такая ФРВ неизвестна, то также можно ограничиться знанием интервала $(\mathbf{p}^{(\min)}, \mathbf{p}^{(\max)})$ для допустимых значений параметров, по которым строится выборка, и считать их распределение внутри указанного интервала однородным (именно этот случай показан на рис. 2).

Для построения выборки по параметрам методом МЦМК вычисления обрываются после достижения допустимого значения функции невязки \mathcal{E} , характеризующей отличие модельной траектории от наблюдений. Такая невязка может быть сформулирована либо в терминах согласия модельных полей с данными наблюдений [43, 45, 52], либо в вероятностных терминах [47, 48], либо с использованием других статистических характеристик [53, 54]. При нормальном распределении параметров, для которых строится выборка, и выпуклой функции невязки сходимость обусловлена справедливостью центральной предельной теоремы [55–57]. Однако для функции \mathcal{E}

с вторичными минимумами (невыпуклой) для предотвращения сходимости МЦМК к одному из вторичных минимумов используются алгоритмы, позволяющие выводить траекторию из областей подобных минимумов с отклонением ряда итераций (для чего вводится дополнительный вероятностный критерий), так что итерация принимается с предписанной вероятностью P_{acc} и отвергается с вероятностью $1 - P_{\text{acc}}$ (см. рис. 2). К таким алгоритмам относятся различные варианты схемы Метрополиса—Гастингса, включая гиббсовскую схему [47, 48, 50, 51], методы взаимодействующих частиц [58] и различные варианты байесовых схем рандомизации [59, 60].

Следует отметить, что выбор метода построения выборки по параметрам — латинского гиперкуба или МЦМК — в работах, как правило, не обосновывается.

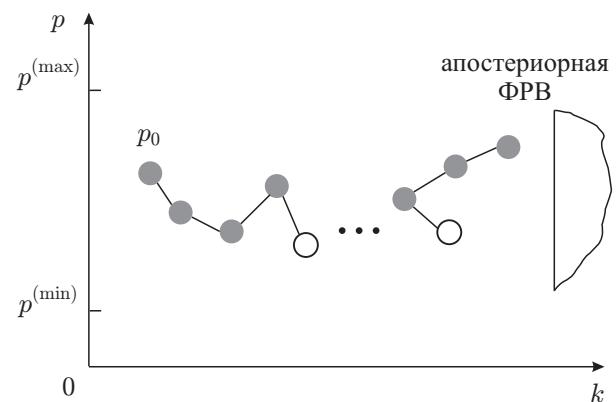


Рис. 2. Общая структура построения выборки для параметра p методом марковской цепи Монте-Карло. Обозначения: k — номер итерации, p_0 — начальное значение параметра из допустимого интервала (p^{\min} , p^{\max}). Серыми кружками обозначены принятые итерации, белыми — отклонённые.

2.2.3. Структурная неопределённость

Стандартом разработки современных МЗС является модульная структура, в принципе допускающая замену одного из модулей (например, модуля вычисления характеристик облачности) альтернативным. Такой подход применяется для процессов, характеристики которых зависят от состояния других модельных модулей, но относительно слабо влияют на это состояние, так что соответствующие обратные связи являются, по сути, односторонними [61].

В случае двунаправленных обратных связей этот подход, однако, затруднителен: МЗС настраивается как целое, и замена одного из модулей без дополнительной настройки может привести к заметному ухудшению близости модельного климата к наблюдениям. В связи с этим чаще применяется другой подход с применением ансамбля моделей с альтернативными друг другу модулями. На практике чаще всего используются ансамбли СМИР разных поколений. Несмотря на целесообразность использования этих ансамблей, следует, однако, иметь ввиду, что такой анализ, скорее всего, неполон ввиду потенциальной возможности формулировки функциональных модулей МЗС, не представленных в существующем ансамбле. Последнее дополнительно усиливается частым копированием модулей (как в виде основных уравнений, так и в виде программного кода) между отдельными моделями земной системы и настройкой всех моделей на единственную реализацию изменений климата в период инструментальных наблюдений [62–64]. В связи с последним ансамбль СМИР часто называют ансамблем возможностей (ensemble of opportunity) [65].

2.3. Сценарии внешних воздействий

Сценарии внешних воздействий на ЗС представляют собой набор данных для изменяющихся во времени внешних воздействий на ЗС, соответствующих выбранным предположениям о развитии экономики и общества, и формулируются, как правило, в детерминистическом виде. При этом широкий интервал возможных траекторий социоэкономического развития в XXI веке приводит и к широкому интервалу значений радиационного форсинга на климат в это столетие. Например, в сценариях семейства SSP (Shared Socioeconomic Pathways) [66], использованных при

интегрировании МЗС в проекте СМИР6, глобально усреднённый радиационный форсинг (см. его определение в разделе 1.2) в 2100 году относительно доиндустриального периода в зависимости от конкретного сценария изменяется от 1,9 до 8,5 Вт/м² — более чем четырёхкратно. В этом случае целесообразным является проведение численных экспериментов либо со всеми доступными сценариями, либо с парой сценариев, определяющей максимальную ширину интервала возможных воздействий. Ввиду того, что вероятность реализации каждого из сценариев может быть неизвестна (как это, например, справедливо для сценариев проекта СМИР [19, 20]), статистические подходы к постановке численных экспериментов, подобные описанным в разделе 2.2, невозможны. Они, однако, могут быть использованы, если сценарии сформулированы в параметрическом виде с известным распределением функции вероятности для параметров.

2.4. Размер ансамбля для случайных выборок

Размер ансамбля при случайной выборке определяется в результате компромисса между целесообразностью наиболее плотного заполнения соответствующего пространства параметров, с одной стороны, и вычислительными ограничениями — с другой [37]. При этом вычислительная дороговизна большинства современных МЗС приводит к выбору значения K для размера ансамбля на основе доступности вычислительных ресурсов. Тем не менее и в этом случае даже грубая теоретическая оценка целесообразного значения K имеет смысл для выводов об адекватности построенного ансамбля выбранной задаче.

Для выборки методом латинского гиперкуба естественно принять $K \gg n$, где n — число параметров, для которых строится выборка. На практике часто используют условие $K/n \geq 10$ (личное общение автора с представителями модельных групп).

Как отмечалось в разделе 2.2.2, для выборки методом МЦМК вычисления обрываются после достижения допустимого значения функции невязки \mathcal{E} . Для такого алгоритма предложены оценки ожидаемого числа итераций [56, 57] (в данной работе эти оценки не приводятся ввиду их громоздкости). Эти оценки могут быть использованы, например, для прерывания алгоритма МЦМК в случае его блуждания между вторичными максимумами.

Для подчиняющихся нормальному распределению климатических переменных минимальный допустимый размер выборки может быть оценён исходя из допустимой ошибки оценки E значения климатической переменной [26]:

$$K_{\min} = \left(\frac{Z_{\alpha} \sigma_{\text{NV}}}{E} \right)^2, \quad (1)$$

где σ_{NV} — временнёе среднеквадратичное отклонение для данной переменной, Z_{α} — площадь под положительным и отрицательным «хвостами» ФРВ для данной климатической переменной, границы которых соответствуют квантилю $\alpha/2$. Для допустимой ошибки воспроизведения приземной температуры $E = 0,5^{\circ}\text{C}$ и квантиля 5 % эта оценка приводит к $K_{\min} \geq 10$ в регионах средних широт с интенсивной синоптической изменчивостью [26]. Соответствующая оценка для количества осадков при $E = 10\%$ в регионе внутритропической зоны конвергенции составляет 15.

Алгоритм выбора K для ансамблей, в которых проводится интегрирование одной модели с разными начальными условиями (это так называемые Single Model Initial-condition Large Ensembles, SMILEs), предложен в [67]. При этом, в частности, был сделан вывод, что величина K , равная нескольким десяткам, достаточна для целей моделирования изменения климата с оценкой неопределённости из-за естественной изменчивости. В настоящее время при наличии достаточных вычислительных ресурсов даже с полными МЗС, основанными на моделях общей циркуляции атмосферы, строятся ансамбли большой размерности. Примером этому служат ансамбли

из 100 реализаций LENS2 (Large Ensemble Community Project, phase 2) с моделью CESM2 [18] и MPI-GE (Max Planck Institute Grand Ensemble) с моделью MPI-ESM1.1 [21]. Длина каждой реализации при этом составила 251 год и 156 лет соответственно.

3. ОБРАБОТКА АНСАМБЛЕВЫХ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

3.1. Ансамблевая статистика

В ряде случаев, например при анализе вклада естественной изменчивости в изменение климата (см. раздел 1.3), необходим анализ отдельных реализаций внутри ансамбля [68]. Тем не менее для большого круга задач можно ограничиться более компактным представлением — анализом ансамблевой статистики. Отметим, однако, что при таком представлении результатов необходима оценка реалистичности (в том или ином смысле) отдельных реализаций.

Полный анализ ансамблевой статистики — построение функции распределения вероятности внутри ансамбля — в большинстве случаев при этом невозможен ввиду чрезмерных требований к числу реализаций K .

Как следствие, в приложениях часто ограничиваются построением двух основных характеристик — ансамблевого среднего (AC) $E(Y|D)$ и ансамблевого (межмодельного) среднеквадратичного отклонения (ACKO) $\sigma(Y|D)$, которые для модельной переменной Y имеют соответственно вид

$$E(Y|D) = \sum_{k=1}^K Y_k w_k, \quad (2)$$

$$\sigma(Y|D) = \left\{ \sum_{k=1}^K [\sigma_{NV,k}^2 + Y_k^2] w_k - E(Y|D)^2 \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где Y_k ($1 \leq k \leq K$) — значение (в общем случае зависящее от трёх пространственных координат и времени) Y для реализации с номером k , $\sigma_{NV,k}$ — временнбё (связанное с естественной изменчивостью) среднеквадратичное отклонение (СКО) для этой реализации. Обе характеристики — $E(Y|D)$ и $\sigma(Y|D)$ — в общем случае зависят от массива эталонных данных D , сравнением с которыми делается вывод о реалистичности отдельных реализаций внутри ансамбля.

Эта реалистичность характеризуется модельными весами w_k , на которые налагается условие нормировки $\sum_{k=1}^K w_k = 1$. Можно выделить следующие подходы к вычислению таких весов:

1) однородные веса, соответствующие одинаковой достоверности модельных траекторий в ансамбле:

$$w_k^{(uni)} \equiv 1/K;$$

2) оптимальные веса, минимизирующие среднеквадратичное отклонение RMSE (пространственное или временнбё) ансамблевого среднего от эталонных данных D :

$$w_k^{(opt)} : \text{RMSE}[E(Y) - D] \rightarrow \min;$$

3) байесовы веса [69, 70], которые вычисляются как величины, пропорциональные байесовому правдоподобию (для данной переменной) модельной траектории с номером k :

$$w_k^{(\text{Bay})} \sim \mathcal{P}(Y_k|D),$$

при таком подходе максимизируется байесова вероятность «правильности» ансамблевого среднегого.

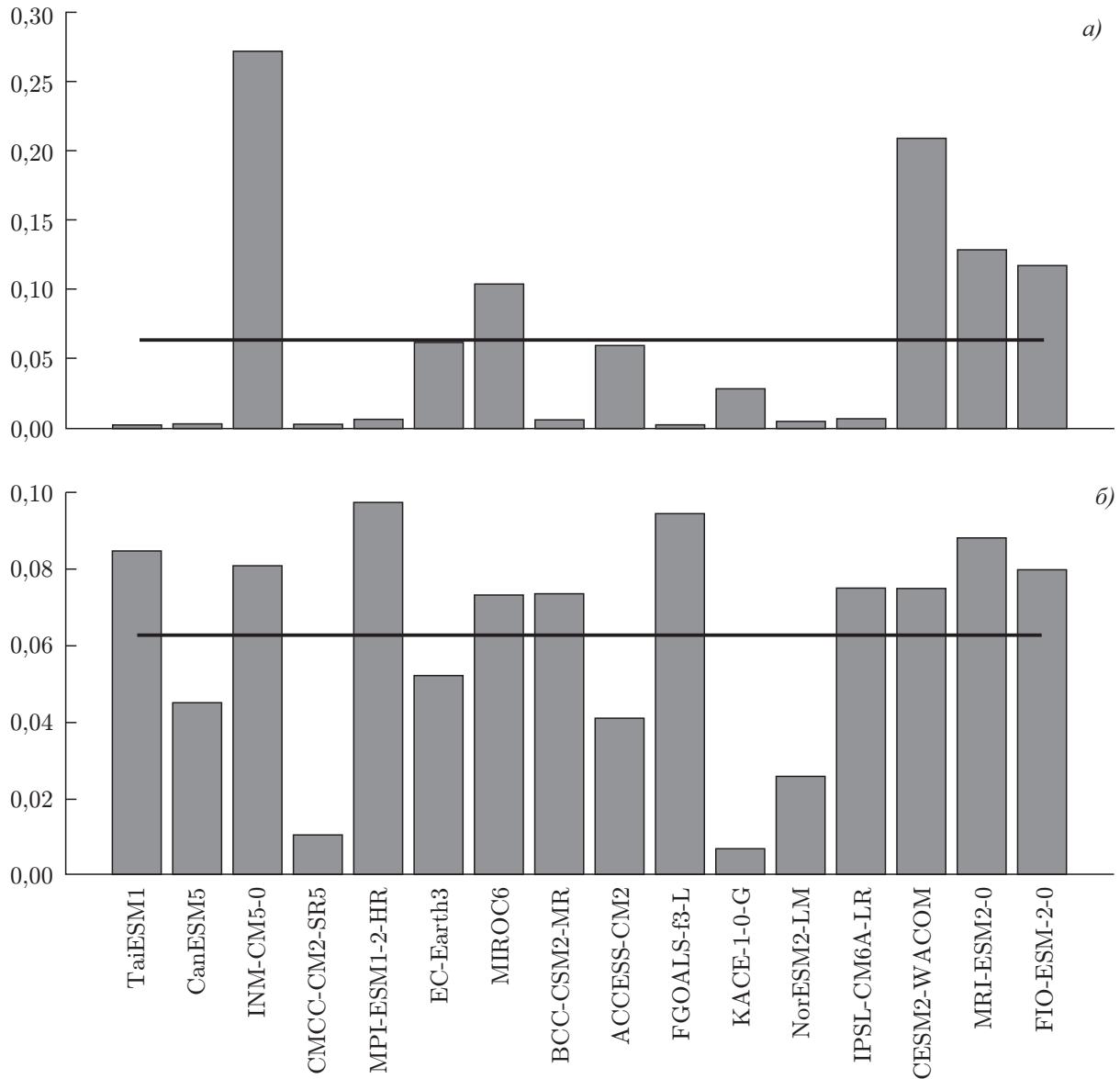


Рис. 3. Байесовы веса для речного стока Волги (а) и Лены (б) для указанных на оси абсцисс моделей CMIP6. Горизонтальной линией показаны соответствующие однородные веса. Воспроизведено по [71]

При использовании однородных весов в (2) и (3) моделям предписывается одинаковая достоверность. В свою очередь, вычисление АС и АСКО с использованием оптимальных или байесовых весов позволяет увеличить вклад в ансамблевую статистику моделей, которые лучше (в терминах той или иной метрики; см. ниже) воспроизводят наблюдаемые характеристики современного состояния ЗС (см. пример на рис. 3). При этом, однако, используется важное (и непроверяемое) предположение, согласно которому лучшее воспроизведение современного состояния земной климатической системы и её изменений соответствует и более достоверным оценкам будущих изменений этого состояния.

При использовании оптимальных весов $w_k^{(\text{opt})}$ минимизируется среднеквадратичное отклонение в четырёхмерном (в общем случае) пространстве, состоящем из трёхмерного физического пространства и времени. Как следствие, в этом случае АС сходится (при гипотетическом беско-

нечном увеличении размера ансамбля K) к D по метрике \mathcal{L}_2 . При использовании байесовых весов $w_k^{(\text{Bay})}$ байесово АС $E(Y|D)$ сходится к D по вероятности. Это согласуется с обычной байесовой интерпретацией вероятности как меры наших знаний о данном объекте [48, 69, 72].

Следует отметить, что в (2) и (3) при вычислении оптимальных весов $w_k^{(\text{opt})}$ с использованием явно зависящих от времени эталонных данных временная фазировка мод естественной изменчивости напрямую влияет на результаты вычислений. Для наиболее часто применяемого подхода к постановке ЧЭ по воспроизведению климата периода инструментальных наблюдений (раздел 1.1) это приводит к чрезмерному влиянию случайной компоненты неопределенности расчётов на ансамблевую статистику. Поэтому оптимальные веса редко используются при оценках будущих изменений климата (в качестве примера обратного, однако, можно привести [73]).

Такого чрезмерного влияния случайной компоненты неопределенности расчётов на ансамблевую статистику можно избежать при использовании байесовых весов $w_k^{(\text{Bay})}$. Однако вычисление этих весов в заметной доле субъективно и в ряде случаев вообще может основываться на предположениях, противоречащих общим подходам к постановке ансамблевых численных экспериментов (см. табл. 1). Примером этого является увеличение байесовых весов для моделей, результаты которых хорошо согласуются между собой [74, 75]: при этом игнорируется возможность наличия у моделей используемого ансамбля общей систематической ошибки. В качестве ещё одного примера можно указать уменьшение весов для моделей, результаты которых статистически связаны между собой (для какой-либо метрики) [76, 77]. Это полезно для более корректной оценки внутриансамблевой неопределенности, но может привести к уменьшению весов для группы моделей, хорошо согласующихся с эталонными данными (и между собой).

В [78] для идеализированного примера ансамбля из двух моделей показано, что уже оптимальные веса значительно уменьшают межмодельный разброс оценок по сравнению со случаем усреднения с однородными весами $w_k^{(\text{uni})}$. При этом, однако, такое уменьшение ограничивается снизу межгодовой изменчивостью климата (слагаемым с $\sigma_{\text{NV},k}^2$ в (3)). Как следствие, байесово взвешивание для переменных с высоким (относительно исследуемого сигнала) уровнем естественной изменчивости может не дать ощутимых преимуществ по сравнению со случаем однородного взвешивания [79].

На количественном уровне для отличия данной схемы взвешивания (и для оптимальных, и для байесовых весов) может использоваться информационная энтропия

$$H = - \sum_{k=1}^K w_k \log_2 w_k. \quad (4)$$

Максимально возможное значение $H = H^{(\text{uni})} = \log_2 K$ достигается при однородных весах. Поэтому в качестве характеристики влияния степени взвешивания моделей на ансамблевую статистику можно использовать величину

$$h = \frac{H}{H^{(\text{uni})}} = \frac{H}{\log_2 K}. \quad (5)$$

Для сильно неоднородных по отдельным модельным расчётам байесовых весов стока Волги на рис. 3 имеем $h = 0,73$, тогда как для близких к однородным весов стока Лены $h = 0,95$.

Байесово взвешивание в настоящее время широко используется для задач построения ансамблевой статистики. Такой подход (например, при использовании отношения $\sigma(Y|D)/E(Y|D)$ [80, 81]) позволяет оценить не только АС и АСКО, но и то, насколько знак АС для изменений климатических переменных во времени устойчив внутри данного ансамбля. Наиболее часто при этом используются модели ансамбля СМР различных поколений. Уже с третьим поколением этого

Таблица 1. Используемые подходы к вычислению байесовых весов

Подход	Достоинства	Недостатки
воспроизведение современного состояния ЗС	правильные начальные условия для оценок будущих изменений; доступность данных	воспроизведение современного состояния не гарантирует правильность отклика на внешнее воздействие
воспроизведение характеристик современной изменчивости состояния ЗС	учёт естественной изменчивости; относительная доступность данных (хуже при большем временному масштабе)	нет прямой связи между воспроизведением изменчивости и откликом при внешнем воздействии
воспроизведение коэффициента тренда для современного периода	учёт отклика на воздействие; относительная доступность данных	необходимы предположения о доли отклика на воздействие в общем сигнале в период обучения модели и для будущих оценок
воспроизведения изменений климата в палеоэпохи	учёт отклика на воздействие, часто большой интенсивности	низкое качество данных о воздействиях и отклике; возможная зависимость коэффициента чувствительности от состояния ЗС
взаимное согласие между моделями	лёгкость использования	неучёт систематических ошибок, общих для всего ансамбля
взаимная зависимость между моделями	коррекция размера ансамбля на зависимость между моделями	возможно ухудшение ансамблевой статистики из-за подавления сигнала от моделей, хорошо согласующихся с наблюдениями (и друг с другом)

ансамбля CMIP3 (CMIP, phase 3) были проведены оценки изменений (анализ результатов интегрирования моделей при различных сценариях антропогенного воздействия на климат в XXI веке) для приземной температуры [82–85], компонент гидрологического цикла [74, 82, 83, 86] или характеристик ледового покрова Арктики и длительности навигации на Северном морском пути [87, 88]. Отметим, что в [82, 86–88] была использована упрощённая бинарная схема вычисления байесовых весов

$$w_k = \begin{cases} w_0, & \mathcal{P}(Y_k|D) \geq \mathcal{P}_0; \\ 0, & \text{в другом случае} \end{cases}$$

с предписанным значением \mathcal{P}_0 и выбираемым из условия нормировки значением w_0 .

Различные схемы байесового взвешивания применялись и для последующих поколений ансамбля CMIP. В частности, с использованием моделей CMIP5 и CMIP6 были проанализированы характеристики циркуляции атмосферы [89], характеристики гидрологического цикла [71, 79, 90, 91] и особенности ледового покрова и длительности навигации на Северном морском пути [92, 93].

В [71, 79, 91–94] предложена схема выделения временных масштабов для оценки качества отдельных моделей внутри ансамбля. Она позволяет оценить такое качество одновременно на спектре временных масштабов, объединив соответствующие достоинства такой оценки на разных частях спектра из табл. 1. Наиболее детальное выделение временных масштабов было использовано в [71], где качество модели оценивалось отдельно для многолетнего среднего значения, коэффициента линейного тренда и характеристик межгодовой и междесятилетней изменчивости климата (при этом в последнем случае было также поставлено условие временной фазировки ведущей моды изменчивости в моделях с данными наблюдений). Использование такой техни-

ки является предпочтительным для анализа климатических изменений на региональном уровне. Однако выделение междесятилетнего масштаба изменчивости приводит к необходимости использования эталонных данных D достаточно большой длительности, что налагает ограничения и на переменные, которые могут быть проанализированы подобным способом.

Если ансамблевая статистика вычисляется не для модельных переменных, а для значений управляющих параметров выбранной модели в численном эксперименте их варьированием, то эта статистика (АС и АСКО), в том числе байесова, может быть применена для калибровки этих параметров [48, 49, 95]. Этот метод был использован для калибровки модулей МЗС [43, 45].

Следует отметить, что подобная калибровка с использованием байесовых функций правдоподобия может быть осуществлена и при построении выборок по параметрам методом МЦМК [52, 96–100]. В этом случае, однако, ансамблевая статистика не вычисляется, а ансамблевый эксперимент прекращается после нахождения минимума функции невязки.

В завершение раздела следует отметить принципиальный недостаток вычисления ансамблевой статистики: ансамблевое среднее вообще может не быть представительным для системы с сильнолинейной динамикой, характеризующейся небольшим числом дискретных состояний с быстрыми (относительно времени нахождения в этих состояниях) переходами между ними. Косвенные данные говорят о том, что это может быть справедливо для погодных вариаций атмосферы на временных масштабах от недели до сезона [101–104]. Статистические характеристики ансамбля также могут не содержать сколь-нибудь значимой информации о динамике мультистабильной системы. Для климата мультистабильность может быть связана с обратной связью между приземной температурой и планетарным альбедо [105–109] или с влиянием распределения Северной Атлантики на интенсивность меридиональной циркуляции в Атлантическом океане [110–112]. Наконец, статистические характеристики ансамбля могут резко изменяться при переходе через критическую точку, когда поведение системы (и, следовательно, ансамблевая статистика) меняется качественным образом [1, 112, 113].

3.2. Межмодельные связи

В последние годы развивается ещё один метод обработки ансамблевых ЧЭ, связанный с анализом межмодельных связей (МС; в англоязычной терминологии — *emergent constraints*) [113–123]. Он состоит в восстановлении допустимых значений ненаблюдаемого параметра или переменной Y_{no} по значениям соответствующей наблюдаемой переменной Y_o с использованием монотонной функции $f(Y_o)$:

$$Y_{no} = f(Y_o) + \varepsilon, \quad (6)$$

где ε — случайный шум. На практике в качестве $f(Y_o)$ обычно выбирают линейную функцию. Если для наблюдаемой переменной известен допустимый интервал $Y_o^{(1)} \leq Y_o \leq Y_o^{(2)}$, то из свойства монотонности f проекцией на ось ординат можно сделать оценку для соответствующего интервала ненаблюдаемой $Y_{no}^{(1)} \leq Y_{no} \leq Y_{no}^{(2)}$ (см. рис. 4).

При этом в качестве ненаблюдаемой переменной может использоваться либо характеристика ЗС, наблюдение которой требует условий, реализация которых затруднительна (типично при этом

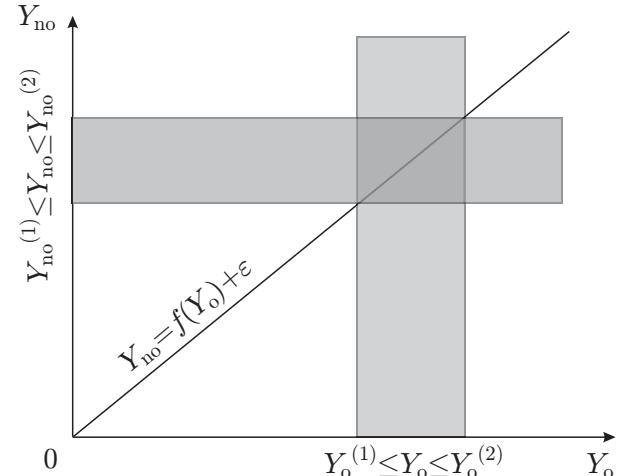


Рис. 4. Схема построения межмодельной связи

оценивается равновесная чувствительность климата к удвоению содержания CO_2 в атмосфере), либо значение потенциально наблюдаемой переменной в будущем. Интерпретация МС в терминах детерминистских и стохастических динамических систем предложена в [113, 124, 125].

Следует иметь в виду, что надёжные оценки с использованием межмодельных связей возможны только в случае, если соотношение (6) отражает физическую связь в ЗС [113, 117]. В противном случае эмпирически выявленные соотношения могут оказаться неустойчивы относительно выбора моделей или вообще не иметь смысла с физической точки зрения [117]. Кроме того, МС могут проявляться по-разному (иногда даже с изменением знака связи) на разных временных масштабах [121] или зависеть от состояния системы. Последнее надо иметь в виду при использовании будущих значений выбранной переменной в качестве ненаблюдаемой, т. к. верификация межмодельных связей, как правило, возможна только по данным, характеризующим современное состояние климата и охватывающим несколько десятилетий. Более того, выявленные МС могут нарушаться при переходе системы через критическую точку, когда поведение системы меняется качественным образом [1, 113].

Отдельно следует упомянуть требования к ансамблю моделей для оценки МС. С одной стороны, все модели ансамбля должны хотя бы грубо учитывать процессы, приводящие к связи (6). С другой стороны, для статистической обеспеченности связи ширина модельного интервала для переменной Y_o должна быть достаточно велика. Как следствие, анализ межмодельных связей требует привлечения не только «лучших» моделей, но и моделей, выходящих за допустимый интервал наблюдаемой $[Y_o^{(1)}, Y_o^{(2)}]$ [113].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы.

1) Модельные ансамбли позволяют оценить неопределённость климатических оценок, связанную с начальными условиями, численными коэффициентами моделей, их структурой и сценариями внешних воздействий.

2) Как правило, среднее по ансамблю лучше согласуется с данными наблюдений по сравнению с отдельными моделями, в том числе «лучшими».

3) Постановка модельных экспериментов должна учитывать знания о распределении параметров интегрирования модели и приводить к несмешённой ансамблевой статистике.

4) Эффективность методов статистической обработки ансамблевых численных экспериментов может быть повышена за счёт выбора веса для каждой из реализаций внутри ансамбля, однако при выборе веса всегда в той или иной мере приходится руководствоваться эвристическими соображениями.

5) Ансамблевые эксперименты могут быть использованы при настройке моделей.

Следует специально отметить, что ансамблевая статистика должна быть основана на достаточно большом количестве реализаций либо отдельных моделей, либо численных экспериментов с изменением начальных условий интегрирования модели, её параметров или структуры. Это, в свою очередь, указывает на продолжение развития не только «лучших», но и других моделей, т. е. реализаций так называемой модельной демократии [126]. В частности, необходимо продолжение развития не только моделей земной системы, основанных на моделях общей циркуляции (наиболее детального класса климатических моделей), но и моделей других классов [1].

Автор выражает глубокую признательность анонимным рецензентам, чьи конструктивные замечания значительно улучшили данный обзор. Подготовка раздела 4 выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государствен-

ного задания ИФА им. А. М. Обухова РАН, раздела 3 — в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова. Остальные разделы подготовлены при поддержке Российского научного фонда (проект 23-62-10043).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елисеев А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2024. Т. 67, № 7. С. 545–561.
https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_07_545
2. Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / ed. by T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, et al. Cambridge : Cambridge University Press, 2013. 1535 p.
3. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / ed. by V. Masson-Delmotte, P. Zhai, A. Pirani, et al. Cambridge : Cambridge University Press, 2021. 2391 p.
4. Lambert S. J., Boer G. J. // Clim. Dyn. 2001. V. 17, No. 2. P. 83–106.
<https://doi.org/10.1007/PL00013736>
5. Мелепшко В. П., Голицын Г. С., Говоркова В. А. и др. // Метеорология и гидрология. 2004. № 4. С. 38–49.
6. Мелепшко В. П., Катцов В. М., Говоркова В. А. и др. // Метеорология и гидрология. 2004. № 7. С. 5–26.
7. Reichler T., Kim J. // Bull. Am. Meteorol. Soc. 2008. V. 89, No. 3. P. 303–311.
<https://doi.org/10.1175/BAMS-89-3-303>
8. Annan J. D., Hargreaves J. C. // J. Clim. 2011. V. 24, No. 16. P. 4529–4538.
<https://doi.org/10.1175/2011JCLI3873.1>
9. Монин А. С. Введение в теорию климата. Л. : Гидрометеоиздат, 1982. 247 с.
10. Annan J. D., Hargreaves J. C. // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37, No. 2. Art. no. L02703.
<https://doi.org/10.1029/2009GL041994>
11. Meehl G. A., Senior C. A., Eyring V., et al. // Sci. Adv. 2020. V. 6, No. 26. Art. no. eaba1981.
<https://doi.org/10.1126/sciadv.aba1981>
12. Hawkins E., Sutton R. // Bull. Am. Meteorol. Soc. 2009. V. 90, No. 8. P. 1095–1107.
<https://doi.org/10.1175/2009BAMS2607.1>
13. Lehner F., Deser C., Maher N., et al. // Earth Syst. Dyn. 2020. V. 11, No. 2. P. 491–508.
<https://doi.org/10.5194/esd-11-491-2020>
14. Schneider T., Griffies S. M. // J. Clim. 1999. V. 12, No. 10. P. 3133–3155.
[https://doi.org/10.1175/1520-0442\(1999\)012<3133:ACFFPS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(1999)012<3133:ACFFPS>2.0.CO;2)
15. Deser C., Terray L., Phillips A. S. // J. Clim. 2016. V. 29, No. 6. P. 2237–2258.
<https://doi.org/10.1175/JCLI-D-15-0304.1>
16. Sippel S., Meinshausen N., Merrifield A., et al. // J. Clim. 2019. V. 32, No. 17. P. 5677–5699.
<https://doi.org/10.1175/JCLI-D-18-0882.1>
17. Gavrilov A., Kravtsov S. V., Buyanova M. N., et al. // Clim. Dyn. 2024. V. 62, No. 3. P. 1783–1810. <https://doi.org/10.1007/s00382-023-06995-1>
18. Rodgers K. B., Lee S.-S., Rosenbloom N., et al. // Earth Syst. Dyn., 2021. V. 12, No. 4. P. 1393–1411. <https://doi.org/10.5194/esd-12-1393-2021>
19. Taylor K. E., Stouffer R. J., Meehl G. A. // Bull. Am. Meteorol. Soc. 2012. V. 93, No. 4. P. 485–498.
<https://doi.org/10.1175/BAMS-D-11-00094.1>
20. Eyring V., Bony S., Meehl G. A., et al. // Geosci. Model Dev. 2016. V. 9, No. 5. P. 1937–1958.
<https://doi.org/10.5194/gmd-9-1937-2016>

21. Maher N., Milinski S., Suarez-Gutierrez L., et al. // *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2019. V. 11, No. 7. P. 2 050–2 069. <https://doi.org/10.1029/2019MS001639>
22. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М. : Мир, 1989. 540 с.
23. Park W., Keenlyside N., Latif M., et al. // *J. Clim.* 2009. V. 22. No. 1. P. 71–92. <https://doi.org/10.1175/2008JCLI2261.1>
24. Wang M., Overland J. E., Kattsov V., et al. // *J. Clim.* 2007. V. 20, No. 6. P. 1 093–1 107. <https://doi.org/10.1175/JCLI4043.1>
25. Predictability of Weather and Climate / ed. by T. Palmer, R. Hagedorn. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. 718 p.
26. Warner T. T. Numerical Weather and Climate Prediction. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 526 p.
27. Bauer P., Thorpe A., Brunet G. // *Nature*. 2015. V. 525, No. 7 567. P. 47–55. <https://doi.org/10.1038/nature14956>
28. Mann M. E., Park J. // *J. Clim.* 1996. V. 9, No. 9. P. 2 137–2 162. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(1996\)009<2137:JSMOST>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(1996)009<2137:JSMOST>2.0.CO;2)
29. Mantua J. N., Hare S. R., Zhang Y., et al. // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 1997. V. 78, No. 6. P. 1 069–1 080. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1997\)078<1069:APICOW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1997)078<1069:APICOW>2.0.CO;2)
30. Knight J. R., Allan R. J., Folland C. K., et al. // *Geophys. Res. Lett.*, 2005. V. 32, No. 20. Art. no. L20708. <https://doi.org/10.1029/2005GL024233>
31. Mukhin D., Gavrilov A., Loskutov E., et al. // *Clim. Dyn.* 2018. V. 51, No. 5–6. P. 2 301–2 310. <https://doi.org/10.1007/s00382-017-4013-2>
32. Deser C., Alexander M. A., Xie S.-P., et al. // *Annu. Rev. Mar. Sci.* 2010. V. 2. P. 115–143. <https://doi.org/10.1146/annurev-marine-120408-151453>
33. Herein M., Tél T., Haszpra T. // *Chaos*. 2023. V. 33, No. 3. Art. no. 031104. <https://doi.org/10.1063/5.0136719>
34. Дымников В. П., Грицун А. С. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41, № 3. С. 294–314.
35. Tél T., Bódai T., Drótós G., et al. // *J. Stat. Phys.* 2020. V. 179, No. 5. P. 1 496–1 530. <https://doi.org/10.1007/s10955-019-02445-7>
36. Drótós G., Bódai T., Tél T. // *J. Clim.* 2015. V. 28, No. 8. P. 3 275–3 288. <https://doi.org/10.1175/JCLI-D-14-00459.1>
37. Deser C., Lehner F., Rodgers K. B., et al. // *Nat. Clim. Change*. 2020. V. 10, No. 4. P. 277–286. <https://doi.org/10.1038/s41558-020-0731-2>
38. Raj D. Sampling Theory. New York : McGraw–Hill, 1968. 302 p.
39. McKay M. D., Beckman R. J., Conover W. J. // *Technometrics*. 1979. V. 21, No. 2. P. 239–245. <https://doi.org/10.1080/00401706.1979.10489755>
40. Stein M. L. // *Technometrics*. 1987. V. 29, No. 2. P. 141–150. <https://doi.org/10.2307/1269769>
41. Schneider von Deimling T., Held H., Ganopolski A., et al. // *Clim. Dyn.* 2006. V. 27, No. 2–3. P. 149–163. <https://doi.org/10.1007/s00382-006-0126-8>
42. Stone E. J., Lunt D. J., Annan J. D., et al. // *Clim. Past*. 2013. V. 9, No. 2. P. 621–639. <https://doi.org/10.5194/cp-9-621-2013>
43. Eliseev A. V., Coumou D., Chernokulsky A. V., et al. // *Geosci. Model Dev.* 2013. V. 6, No. 5. P. 1 745–1 765. <https://doi.org/10.5194/gmd-6-1745-2013>
44. Eliseev A. V., Mokhov I. I., Chernokulsky A. V. // *Biogeosciences*. 2014. V. 11, No. 12. P. 3 205–3 223. <https://doi.org/10.5194/bg-11-3205-2014>
45. Eliseev A. V., Gizatullin R. D., Timazhev A. V. // *Geosci. Model Dev.* 2021. V. 14, No. 12. P. 7 725–7 747. <https://doi.org/10.5194/gmd-14-7725-2021>

46. Bourcet J., Kubilay A., Derome D., et al. // *Build. Environ.* 2023. V. 228. Art. no. 109875. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.109875>
47. Hastings W. K. // *Biometrika*. 1970. V. 57, No. 1. P. 97–109. <https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>
48. Sen M. K., Stoffa P. L. // *Geophys. Prospect.* 1996. V. 44, No. 2. P. 313–350. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1996.tb00152.x>
49. Jackson C., Sen M. K., Stoffa P. L. // *J. Clim.* 2004. V. 17, No. 14. P. 2828–2841. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(2004\)017<2828:AESBAT>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(2004)017<2828:AESBAT>2.0.CO;2)
50. Craiu R. V., Rosenthal J. S. // *Annu. Rev. Stat. Appl.* 2014. V. 1. P. 179–201. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-022513-115540>
51. Robert C. P. // *Annu. Rev. Stat. Appl.* 2014. V. 1. P. 153–177. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-022513-115543>
52. Totz S., Eliseev A. V., Petri S., et al. // *Geosci. Model Dev.* 2018. V. 11, No. 2. P. 665–679. <https://doi.org/10.5194/gmd-11-665-2018>
53. Von Storch H., Zwiers F. W. *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. 484 p.
54. Wilks D. S. *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. Oxford : Academic Press, 2011. 704 p.
55. Geyer C. J. // *Stat. Sci.* 1992. V. 7, No. 4. P. 473–483. <https://doi.org/10.1214/ss/1177011137>
56. Roy V. // *Annu. Rev. Stat. Appl.* 2020. V. 7. P. 387–412. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-031219-041300>
57. Jones G. L., Qin Q. // *Annu. Rev. Stat. Appl.* 2022. V. 9. P. 557–578. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-040220-090158>
58. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* / ed. by B. Steve, A. Gelman, G. Jones, et al. New York : Chapman and Hall, 2011. 619 p.
59. Hartigan J. A. // *J. R. Stat. Soc. B*. 1969. V. 31, No. 3. P. 446–454. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1969.tb00804.x>
60. Godambe V. P. // *Ann. Inst. Stat. Math.* 1999. V. 51, No. 2. P. 201–215. <https://doi.org/10.1023/A:1003893706155>
61. Clark S. K., Ward D. S., Mahowald N. M. // *Geophys. Res. Lett.* 2017. V. 44, No. 6. P. 2893–2901. <https://doi.org/10.1002/2017GL073017>
62. Brunner L., Pendergrass A. G., Lehner F., et al. // *Earth Syst. Dyn.* 2020. V. 11, No. 4. P. 995–1012. <https://doi.org/10.5194/esd-11-995-2020>
63. Kuma P., Bender F. A.-M., Jönsson A. R. // *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2023. V. 15, No. 7. Art. no. e2022MS003588. <https://doi.org/10.1029/2022MS003588>
64. Jun M., Knutti R., Nychka D. W. // *J. Am. Stat. Soc.* 2008. V. 103, No. 483. P. 934–947. <https://doi.org/10.1198/016214507000001265>
65. Stone D. A., Allen M. R., Seltzer F., et al. // *J. Clim.* 2007. V. 20, No. 3. P. 504–516. <https://doi.org/10.1175/JCLI3966.1>
66. Meinshausen M., Nicholls Z. R. J., Lewis J., et al. // *Geosci. Model Dev.* 2020. V. 13, No. 8. P. 3571–3605. <https://doi.org/10.5194/gmd-13-3571-2020>
67. Milinski S., Maher N., Olonscheck D. // *Earth Syst. Dyn.* 2020. V. 11, No. 4. P. 885–901. <https://doi.org/10.5194/esd-11-885-2020>
68. Bokuchava D. D., Semenov V. A. // *Earth Sci. Rev.* 2021. V. 222. Art. no. 103820. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2021.103820>
69. Leroy S. S. // *J. Clim.* 1998. V. 11, No. 4. P. 640–651. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(1998\)011<0640:DCSSBA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(1998)011<0640:DCSSBA>2.0.CO;2)

70. Hoeting J. A., Madigan D., Raftery A. E., et al. // Stat. Sci. 1999. V. 14, No. 4. P. 382–401. <https://doi.org/10.1214/ss/1009212519>
71. Медведев А. И., Елисеев А. В., Мохов И. И. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2024. Т. 60, № 2. С. 135–156. <https://doi.org/10.31857/S0002351524020021>
72. Hasselmann K. // Q. J. R. Met. Soc. 1998. V. 124, No. 552. P. 2 541–2 565. <https://doi.org/10.1002/qj.49712455202>
73. Alexandrov G. A., Ginzburg V. A., Insarov G. E., et al. // Clim. Change. 2021. V. 169, No. 3. Art. no. 42. <https://doi.org/10.1007/s10584-021-03292-w>
74. Tebaldi C., Mearns L. O., Nychka D., et al. // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31, No. 24. Art. no. L24213. <https://doi.org/10.1029/2004GL021276>
75. Tebaldi C., Smith R. W., Nychka D., et al. // J. Clim. 2005. V. 18, No. 10. P. 1 524–1 540. <https://doi.org/10.1175/JCLI3363.1>
76. Knutti R., Sedláček J., Sanderson B. M., et al. // Geophys. Res. Lett. 2017. V. 44, No. 4. P. 1 909–1 918. <https://doi.org/10.1002/2016GL072012>
77. Abramowitz G., Herger N., Gutmann E., et al. // Earth Syst. Dyn. 2019. V. 10, No. 1. P. 91–105. <https://doi.org/10.5194/esd-10-91-2019>
78. Weigel A. P., Knutti R., Liniger M. A., et al. // J. Clim. 2010. V. 23, No. 15. P. 4 175–4 191. <https://doi.org/10.1175/2010JCLI3594.1>
79. Липавский А. С., Елисеев А. В., Мохов И. И. // Метеорология и гидрология. 2022. № 5. С. 64–82. <https://doi.org/10.52002/0130-2906-2022-5-64-82>
80. Duan Q., Phillips T. J. // J. Geophys. Res. Atmos. 2010. V. 115, No. D18. Art. no. D18123. <https://doi.org/10.1029/2009JD013654>
81. Arzhanov M. M., Eliseev A. V., Mokhov I. I. // Glob. Planet. Change. 2012. V. 86–87. P. 57–65. <https://doi.org/10.1016/j.gloplacha.2012.02.001>
82. Overland J. E., Wang M., Bond N. A., et al. // J. Clim. 2011. V. 24, No. 6. P. 1 565–1 582. <https://doi.org/10.1175/2010JCLI3462.1>
83. Greene A. M., Goddard L., Lall U. // J. Clim. 2006. V. 19, No. 17. P. 4 326–4 343. <https://doi.org/10.1175/JCLI3864.1>
84. Min S.-K., Hense A. // J. Clim. 2006. V. 19, No. 13. P. 3 237–3 256. <https://doi.org/10.1175/JCLI3784.1>
85. Min S.-K., Hense A. // J. Clim. 2007. V. 20, No. 12. P. 2 769–2 790. <https://doi.org/10.1175/JCLI4178.1>
86. Kattsov V. M., Walsh J. E., Chapman W. L., et al. // J. Hydrometeorol. 2007. V. 8, No. 3. P. 571–589. <https://doi.org/10.1175/JHM575.1>
87. Khon V. C., Mokhov I. I., Latif M., et al. // Clim. Change. 2010. V. 100, No. 3–4. P. 757–768. <https://doi.org/10.1007/s10584-009-9683-2>
88. Хон В. Ч., Мохов И. И. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 1. С. 19–25.
89. Whittleston D., McColl K. A., Entekhabi D. // J. Clim. 2018. V. 31, No. 6. P. 2 533–2 545. <https://doi.org/10.1175/JCLI-D-17-0316.1>
90. Massoud E. C., Lee H., Gibson P. B., et al. // J. Hydrometeorol. 2020. V. 21, No. 10. P. 2 401–2 418. <https://doi.org/10.1175/JHM-D-19-0258.1>
91. Аржанов М. М., Мохов И. И., Парфенова М. Р. // Докл. РАН. Науки о Земле. 2024. Т. 514, № 1. С. 161–171. <https://doi.org/10.31857/S2686739724010198>
92. Кибанова О. В., Елисеев А. В., Мохов И. И. и др. // Докл. РАН. 2018. Т. 481, № 1. С. 89–94. <https://doi.org/10.31857/S086956520000059-7>
93. Парфенова М. Р., Елисеев А. В., Мохов И. И. // Докл. РАН. Науки о Земле. 2022. Т. 507, № 1. С. 118–125. <https://doi.org/10.31857/S2686739722601454>

94. Елисеев А. В., Семенов Б. А. // Докл. РАН. 2016. Т. 471, № 2. С. 214–218.
<https://doi.org/10.7868/S0869565216320190>
95. Kennedy M. C., O'Hagan A. // J. R. Stat. Soc. B. 2008. V. 63, No. 3. P. 425–464.
<https://doi.org/10.1111/1467-9868.00294>
96. Jackson C. S., Sen M. K., Huerta G., et al. // J. Clim. 2008. V. 21, No. 24. P. 6698–6709.
<https://doi.org/10.1175/2008JCLI2112.1>
97. Ricciuto D. M., Davis K. J., Keller K. // Glob. Biogeochem. Cycles. 2008. V. 22, No. 2. Art. no. GB2030. <https://doi.org/10.1029/2006GB002908>
98. Xu T., Valocchi A. J., Ye M., et al. // Water Resour. Res. 2017. V. 53, No. 4. P. 3224–3245.
<https://doi.org/10.1002/2016WR019512>
99. Lu D., Ricciuto D., Walker A., et al. // Biogeosciences. 2017. V. 14, No. 18. P. 4295–4314.
<https://doi.org/10.5194/bg-14-4295-2017>
100. Phipps S. J., Roberts J. L., King M. A. // Geosci. Model Dev. 2021. V. 14, No. 8. P. 5107–5124.
<https://doi.org/10.5194/gmd-14-5107-2021>
101. Corti S., Molteni F., Palmer T. N. // Nature. 1999. V. 398, No. 6730. P. 799–802.
<https://doi.org/10.1038/19745>
102. Palmer T. N. // J. Clim. 1999. V. 12, No. 2. P. 575–591.
[https://doi.org/1520-0442\(1999\)012<0575:ANDPOC>2.0.CO;2](https://doi.org/1520-0442(1999)012<0575:ANDPOC>2.0.CO;2)
103. Бабанов Б. А., Семенов Б. А., Мохов И. И. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59, № 6. С. 686–706. <https://doi.org/10.31857/S0002351523060020>
104. Бабанов Б. А., Семенов Б. А., Акперов М. Г. и др. // Оптика атмосферы и океана. 2023. Т. 36, № 4. С. 304–312. <https://doi.org/10.15372/AOO20230407>
105. Будыко М. И. // Метеорология и гидрология. 1968. № 11. С. 3–12.
106. Budyko M. I. // Tellus. 1969. V. 21, No. 5. P. 611–619.
<https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1969.tb00466.x>
107. Rennó N. O. // Tellus. 1997. V. 49, No. 4. P. 423–438. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v49i4.14681>
108. Kaszás B., Haszpra T., Herein M. // Chaos. 2019. V. 29, No. 11. Art. no. 113102.
<https://doi.org/10.1063/1.5108837>
109. Voigt A., Marotzke J. // Clim. Dyn. 2010. V. 35, No. 5. P. 887–905.
<https://doi.org/10.1007/s00382-009-0633-5>
110. Welander P. // Dyn. Atmos. Oceans. 1982. V. 6, No. 4. P. 233–242.
[https://doi.org/10.1016/0377-0265\(82\)90030-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(82)90030-6)
111. Rahmstorf S., Crucifix M., Ganopolski A., et al. // Geophys. Res. Lett. 2005. V. 32, No. 23. Art. no. L23605. <https://doi.org/10.1029/2005GL023655>
112. Margazoglou G., Grafke T., Laio A., et al. // Proc. R. Soc. A. 2021. V. 477, No. 2250. Art. no. 20210019. <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0019>
113. Williamson M. S., Thackeray C. W., Cox P. M., et al. // Rev. Mod. Phys. 2021. V. 93, No. 2. Art. no. 025004. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025004>
114. Володин Е. М. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44, № 3. С. 311–323.
115. Wenzel S., Cox P. M., Eyring V., et al. // J. Geophys. Res. Biogeosci. 2014. V. 119, No. 5. P. 794–807. <https://doi.org/10.1002/2013JG002591>
116. Cox P. M., Huntingford C., Williamson M. S. // Nature. 2018. V. 553, No. 7688. P. 319–322.
<https://doi.org/10.1038/nature25450>
117. Caldwell P. M., Zelinka M. D., Klein S. A. // J. Clim. 2018. V. 31, No. 10. P. 3921–3942.
<https://doi.org/10.1175/JCLI-D-17-0631.1>
118. Cox P. M. // Curr. Clim. Change Rep. 2019. V. 5, No. 4. P. 275–281.
<https://doi.org/10.1007/s40641-019-00141-y>

119. Jiménez-de-la Cuesta D., Mauritsen T. // *Nat. Geosci.* 2019. V. 12, No. 11. P. 902–905. <https://doi.org/10.1038/s41561-019-0463-y>
120. Williamson D. B., Sansom P. G. // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 2019. V. 100, No. 12. P. 2571–2588. <https://doi.org/10.1175/BAMS-D-19-0131.1>
121. Winkler A. J., Myneni R. B., Brovkin V. // *Earth Syst. Dyn.* 2019. V. 10, No. 3. P. 501–523. <https://doi.org/10.5194/esd-10-501-2019>
122. Hall A., Cox P., Huntingford C., et al. // *Nat. Clim. Change.* 2019. V. 9, No. 4. P. 269–238. <https://doi.org/10.1038/s41558-019-0436-6>
123. Nijssse F. J. M. M., Cox P. M., Williamson M. S. // *Earth Syst. Dyn.* 2020. V. 11, No. 3. P. 737–750. <https://doi.org/10.5194/esd-11-737-2020>
124. Nijssse F. J. M. M., Dijkstra H. A. // *Earth Syst. Dyn.* 2018. V. 9, No. 3. P. 999–1012. <https://doi.org/10.5194/esd-9-999-2018>
125. Huntingford C., Cox P. M., Williamson M. S., et al. // *Earth Syst. Dyn.* 2023. V. 14, No. 2. P. 433–442. <https://doi.org/10.5194/esd-14-433-2023>
126. Knutti R. // *Clim. Change.* 2010. V. 102, No. 3–4. P. 395–404. <https://doi.org/10.1007/s10584-010-9800-2>

Поступила в редакцию 22 января 2025 г.; принятая в печать 28 апреля 2025 г.

ENSEMBLE SIMULATIONS WITH EARTH SYSTEM MODELS

A. V. Eliseev

Currently, the ensemble approach to climate modelling is widely used. This, in particular, allows estimating the uncertainty characteristics of changes in the state of the Earth's climate system. Often, an already existing ensemble of modern Earth system models is used, for example, the CMIP (Coupled Models Intercomparison Project) ensembles of different generations. It is also reasonable to set up special ensemble numerical experiments with climate models, in which some parameters of models or initial conditions of integration are systematically varied. The purpose of this paper is to review the most commonly used methods for constructing and post-processing ensemble numerical experiments with Earth system models, as well as examples of using the ensemble approach for climate modeling problems. The effect of various sources of uncertainty on the total uncertainty of the modeling results is discussed.